2020-2021
Centrale-Supelec, Campus de Metz

Examen Cours CIP (Partie Intégration)

Durée : 1h30.
Cours autorisé

Exercice (interversions limite et intégrale)

Les questions de cet exercice sont indépendantes mais traitent toutes d'interversions entre limites et intégrales.

1. Dans cette question, on montre que si une suite de fonctions positives (f_n) converge presque partout vers une fonction f, le fait que $\int f_n$ converge vers une constante $c \in \mathbb{R}_+$ n'implique pas nécéssairement que $\int f = c$.

   On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ (la fonction indicatrice du segment $[n, n+1]$).

   (a) Etudier la convergence preque partout de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Déterminer $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Conclure.

2. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_{]0,+\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\mathrm{d}t.$$

   Indication : se ramener à une étude sur $]0, 1[$ *et sur* $]1, +\infty[$.

3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables bornées sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge vers f pour la norme L^∞ (c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} = 0$).

   (a) On suppose que Ω est de mesure de Lebesgue finie. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x.$$

   (b) Sans hypothèse de mesure finie de Ω, donner un contre-exemple au résultat de la question précédente (on pourra prendre $N = 1$ pour faire au plus simple).

Exercice (un peu de Fourier)

- Dans cet exercice, on dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$ lorsque son module $|f|$ est une fonction intégrable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, et on définit alors $\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{Re}(f) + i \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{Im}(f)$. On admet que toutes les définitions et les résultats du cours sur les espaces L^p (Hölder, Fubini ...) se généralisent rapidement aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ en remplaçant valeur absolue par module.
- Si x et y sont dans $\mathbb{R}^N$ on note $x \cdot y = x_1y_1 + \cdots + x_Ny_N$ le produit scalaire usuel.

Soit $u \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ (une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{C}$). On définit pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$:

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x)e^{-2i\pi x\cdot\xi}\mathrm{d}x$$

1. Montrer que $\hat{u}(\xi)$ est bien défini pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$.
2. Montrer que $u \mapsto \hat{u}$ définit une application linéaire continue de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$.

3. Passage du chapeau : montrer que si u et v sont dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}v = \int_{\mathbb{R}^N} u\hat{v}$$

On commencera par montrer que ces deux quantités sont bien définies.

Exercice (un calcul d'intérale)

Pour $u \in \mathbb{R}$, on considère l'ensemble $A_u = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \text{ tel que } \dfrac{y}{x} \leq u\right\}$.

1. Représentation de A_u :
   (a) Faire un dessin dans $\mathbb{R}^2$ et hachurer A_1.
   (b) Faire un dessin dans $\mathbb{R}^2$ et hachurer A_0.
   (c) Faire un dessin dans $\mathbb{R}^2$ et hachurer A_{-1}.

2. Soit $f : (x,y) \mapsto e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. Grâce à un changement de variables en coordonnées polaires, calculer, pour $u \in \mathbb{R}$, la valeur de $\displaystyle\iint_{A_u} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.